OLIMPIADA DE MATEMATICÃ
ETAPA LOCALÃ
22 februarie 2014

CLASA a VIII-a

Bareme de corectare

SUBIECTUL I

(3p) **a)** Se consideră numărul $A = n^2 - n - 12, \quad n \in \boldsymbol{N}$. Să se arate că, dacă A este divizibil cu 7, atunci A este divizibil cu 98.

(4p) **b)** Să se arate că numărul $B = n^2 + 10n - 3$ nu este divizibil cu 196, pentru orice valoare naturală a numărului n.

Soluţie

a) $A = (n+3)(n-4)$, **(1p);** $7/(n+3) \Leftrightarrow 7/(n-4)$ şi $2/(n+3)(n-4), (\forall) n \in N$ **(1p);** finalizare **(1p)**.

b) $B = (n+5)^2 - 28,$ **(1p);** Presupunem $196/B \Rightarrow B = 196k, \quad k \in N$. Deci $(n+5)^2 - 28 = 196k \Leftrightarrow (n+5)^2 = 28(7k+1)$, **(1p);**

$7/(n+5)$ şi avem $(7p)^2 = 28(7k+1) \Leftrightarrow 7p^2 = 4(7k+1), \quad p \in N$ **(1p).** Finalizare **(1p)**

SUBIECTUL II

(1p) **a)** Stabiliţi dacă $\frac{1}{\sqrt{2014}} < \frac{2}{\sqrt{2014} + \sqrt{2013}} < \frac{1}{\sqrt{2013}}$.

(3p) **b)** Arătaţi că $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$, pentru orice valoare naturală nenulă a numărului n.

(3p) **c)** Demonstraţi că $\frac{1}{\sqrt{100}} + \frac{1}{\sqrt{101}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{120}} > \frac{1}{\sqrt{145}} + \frac{1}{\sqrt{146}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{169}}$.

Str. Lacului, nr.19, Slobozia, Ialomiţa
Tel: 0243/231.825; 0372.705.073; Fax: 0243.231.825
E-mail: secretariat@isjialomita.ro

Soluţie

a) Avem
$\frac{2}{2\sqrt{2014}}<\frac{2}{\sqrt{2014}+\sqrt{2013}}<\frac{2}{2\sqrt{2013}} \Leftrightarrow \sqrt{2014}+\sqrt{2014}>\sqrt{2014}+\sqrt{2013}>\sqrt{2013}+\sqrt{2013}$.**(1p)**

b) Avem $\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}$ **(1p);** $\frac{2}{2\sqrt{n+1}}<\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{2}{2\sqrt{n}}$ **(1p)**
$\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}>\sqrt{n+1}+\sqrt{n}>\sqrt{n}+\sqrt{n}$, finalizare **(1p)**

c) Fie $x=\frac{1}{\sqrt{100}}+\frac{1}{\sqrt{101}}+...+\frac{1}{\sqrt{120}}>2\left(\sqrt{101}-\sqrt{100}\right)+2\left(\sqrt{102}-\sqrt{101}\right)+...+2\left(\sqrt{121}-\sqrt{120}\right)=2$,
(1p) şi

$y=\frac{1}{\sqrt{145}}+\frac{1}{\sqrt{146}}+...+\frac{1}{\sqrt{169}}<2\left(\sqrt{145}-\sqrt{144}\right)+2\left(\sqrt{146}-\sqrt{145}\right)+...+2\left(\sqrt{169}-\sqrt{168}\right)=2$, **(1p).**

Finalizare **(1p)**

SUBIECTUL III

Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Punctele P, Q şi R sunt proiecţiile punctului A pe dreptele $A'D$, $A'B$ şi respectiv $A'C$.

(4p) **a)** Să se arate că dreapta $A'C$ este perpendiculară pe planul (PQR);

(3p) **b)** Să se calculeze aria triunghiului PQR, pentru $AB=a\ \ cm,\ \ a>0$.

Soluţie

a) $AP\perp A'D,\ \ AP\perp DC\Rightarrow AP\perp (A'DC)$ **(1p)**

$AP\perp A'C,\ \ AR\perp A'C\Rightarrow A'C\perp (APR)\Rightarrow A'C\perp PR$ **(1p)**

Analog $A'C\perp (ARQ)\Rightarrow A'C\perp QR$ sau $PQ // BD$ $şi$ $BD\perp A'C\Rightarrow PQ\perp A'C$ **(1p)**

Finalizare **(1p)**

b) $PQ=\frac{a\sqrt{2}}{2},(\Delta A'BD)$ **(1p)**

Str. Lacului, nr.19, Slobozia, Ialomiţa
Tel: 0243/231.825; 0372.705.073; Fax: 0243.231.825
E-mail: secretariat@isjialomita.ro

$RQ=\frac{a\sqrt{6}}{6},(\Delta A'BC)$; $RP=\frac{a\sqrt{6}}{6},(\Delta A'DC)$ **(1p)**

$A_{\Delta PQR}=\frac{a^2\sqrt{3}}{24}$ **(1p)**

SUBIECTUL I V

Fie A, B, C şi D patru puncte necoplanare aşa încât $AB=6cm$, $AC=AD=6\sqrt{2}\ cm$ şi $m\angle(DAB)=m\angle(BAC)=m\angle(CAD)=90^0$.

(2p) **a)** Să se calculeze aria triunghiului BCD;

(5p) **b)** Să se afle lungimea segmentului AE, unde E este proiecţia punctului A pe planul (BCD).

Soluţie

a) $BC=BD=6\sqrt{3},\ CD=12$ **(1p)**

$A_{\Delta BCD}=36\sqrt{2}$ **(1p)**

b) Demonstrează că punctul E este ortocentrul triunghiului BCD. **(2p)**

Fie $BM\perp CD,\ DN\perp BC,\ M\in CD,\ N\in BC$, avem:

$BM=6\sqrt{2},\ DN=4\sqrt{6},\ BN=2\sqrt{3}$ **(1p)**

$\Delta BNE\sim\Delta BMC$, $BE=3\sqrt{2}$ **(1p).** Finalizare $AE=3\sqrt{2}$, **(1p)**